CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR 1982

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES (3 h)

N.B. 1°) Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels. La lettre e désigne la base des logarithmes népériens.

2°) Les questions 2° et 3° de la partie préliminaire ne sont utiles que pour la résolution de la partie II.

3°) Les candidats qui jugeraient la question 4° de la partie préliminaire trop difficile sont invités à ne pas y consacrer trop de temps, les résultats de cette question n'ayant aucune incidence sur la suite du problème.

PARTIE PRELIMINAIRE

1°) Soient a et b deux réels quelconques. Montrer que :

$$\sup(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|,$$
$$\inf(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}|a-b|.$$

2°) u désignant un réel non nul, posons : $\theta(u) = u - \dfrac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$

Vérifier que θ est impaire.

Etudier les variations de θ lorsque u décrit $\mathbb{R}^*$.

Montrer que l'équation $\theta(u) = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une racine et une seule notée u_o.

Montrer que $u_o > 1$.

On ne demande pas de calcul approché de u_o, ni de tracé du graphe de θ.

3°) u désignant un réel tel que pour tout k entier relatif on ait $u \neq k\pi$, posons : $\phi(u) = u + \operatorname{cotg} u$.

Vérifier que ϕ est impaire.

Etudier les variations de ϕ lorsque u décrit l'intervalle $](n - 1)\pi, n.\pi[$, où n est un entier strictement positif. On ne demande pas de tracé du graphe de ϕ.

Montrer que l'équation $\phi(u) = 0$ n'a aucune racine dans l'intervalle $](n-1)\pi, (n-\frac{1}{2})\pi[$ et qu'elle en a une et une seule, notée α_n, dans l'intervalle $](n-\frac{1}{2})\pi, n\pi[$.

4°) Les notations étant celles de la question précédente, on pose :

$$\beta_n = n\pi - \alpha_n$$

On a donc, de façon évidente, $0 < \beta_n < \frac{\pi}{2}$. Montrer que : $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$

Montrer que β_n admet, quand $n \to +\infty$, des développements limités à tous les ordres selon les puissances de $\frac{1}{n}$. Calculer effectivement les coefficients du développement limité de β_n selon les puissances de $\frac{1}{n}$ à l'ordre 3 inclus. On ne demande pas de valeur décimale approchée de ces coefficients. On pourra pour cela transformer la relation entre β_n et n en posant :

$x = \frac{1}{n}$, $y = \beta_n$ et étudier y considéré comme fonction implicite de x.

.../...

PARTIE I

On désigne par C la partie de $\mathbb{R}^2$ ensemble des couples (s, t) tels que $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. C est muni de la distance euclidienne de la géométrie usuelle.

On appelle noyau réel continu une application continue K de C dans $\mathbb{R}$.

Un réel λ est dit valeur propre de K s'il existe au moins une application continue f, non nulle, de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout s élément de $[0, 1]$, $\lambda f(s) = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)dt$.

f est alors dite fonction propre de K associée à λ.

Dans toute la partie I, on prend : $K(s,t) = \inf(s,t)$.

1°) Vérifier que K est continu et que :

$$\int_0^1 K(s,t)\, f(t)dt = \int_0^s tf(t)dt + s \int_s^1 f(t)dt$$

2°) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de K ; on montrera pour cela que si :

$$\forall\, s \in [0,1] \quad , \quad 0 = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)dt, \text{ alors } f = 0$$

3°) On suppose que λ, non nul, est valeur propre de K,et soit f une fonction propre associée à λ. Montrer que f est indéfiniment dérivable, et qu'elle vérifie une équation différentielle du deuxième ordre très simple, (E), que l'on formera.

Montrer également que $f(0) = f'(1) = 0$.

4°) Montrer que K n'admet aucune valeur propre strictement négative.

5°) Montrer que K admet une suite infinie de valeurs propres strictement positives telles que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \ldots$ Calculer λ_n en fonction de n, n désignant un entier strictement positif. Déterminer l'ensemble des fonctions propres associées à λ_n.

X

PARTIE II

Les notations sont celles de la partie I, mais on prend cette fois :

$$K(s,t) = \sup(s,t)$$

1°) Vérifier que K est continu.

2°) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de K.

3°) On suppose que λ, non nul, est valeur propre de K, et soit f une fonction propre associée à λ. Montrer que f est indéfiniment dérivable, et qu'elle vérifie une équation différentielle (E') très simple, que l'on écrira.

Montrer également que $f'(0) = 0$.

4°) Montrer que K admet une valeur propre strictement positive h et une seule, que l'on caractérisera à l'aide de la partie préliminaire. Déterminer l'ensemble des fonctions propres associées à h.

5°) Montrer que K admet une suite infinie de valeurs propres strictement négatives telles que $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \mu_{n+1} < \ldots$ On caractérisera μ_n à l'aide de la partie préliminaire. Déterminer l'ensemble des fonctions propres associées à μ_n.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail